

Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Guanajuato

Instrucciones:

- Tienes tres horas para resolver este examen.
- Para cada pregunta, coloca en la pregunta correspondiente de la forma de Google la respuesta que consideres correcta. Todas las respuestas son números enteros positivos.
- Para resolver los problemas te recomendamos contar con lápiz y papel, pero no está permitido el uso de calculadoras, inteligencia artificial o ayuda de otras personas.
- Los alumnos seleccionados para la siguiente etapa se publicarán el Miércoles 5 de marzo en la página ommgto.cimat.mx

Problemas.

1. ¿Cuántos enteros positivos n satisfacen que

$$\frac{n}{40 - n}$$

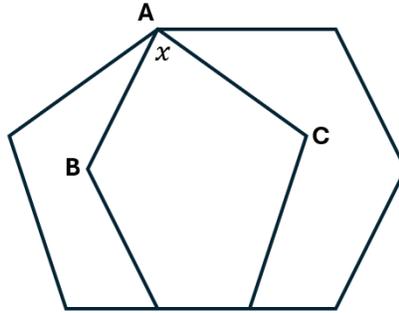
también es un entero positivo?

2. Una lista que comienza con los números 2 y 7 (en ese orden) se construye de la siguiente forma:
 - Si el número que se va escribir está en una posición impar entonces es el resultado de sumar los últimos dos números.
 - Si el número que se va escribir está en una posición par entonces es el resultado de restarle al penúltimo número el último número.

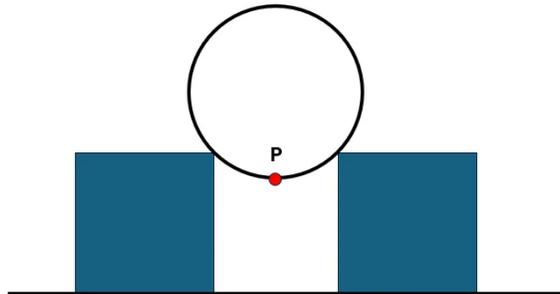
Si la lista tiene 2024 términos ¿En qué posición aparece por última vez el número más grande de la lista?

3. Sea A el producto de los divisores positivos de 32 y B la suma de los divisores positivos de 32. Determina el valor de $\frac{A}{B+1}$.

4. En la siguiente figura se tiene un pentágono regular y un hexágono regular. Determina la medida del ángulo $\angle BAC$ marcado con x .

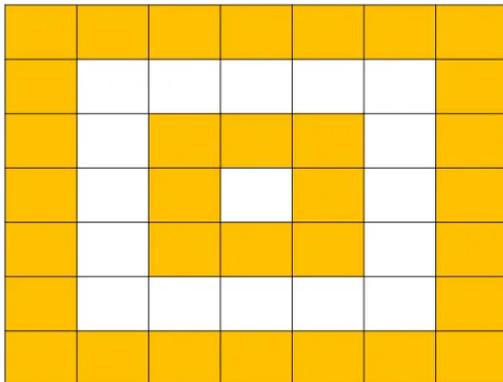


5. En cierta semana del año cuatro amigos visitaron su restaurante favorito. Lo curioso es que cada uno de ellos fue solo un día de la semana, no todos fueron el mismo día y por lo menos dos de ellos sí fueron el mismo día ¿de cuántas maneras pudo suceder esto?
6. En la figura se tienen dos cuadrados de lado 14 m separados por una distancia de 12 m. Ellos sostienen un círculo de radio 10 m. El punto P es el punto del círculo más cercano al suelo, ¿cuál es la distancia de P al suelo?



7. Se tienen dos pelota azules, dos pelota rojas, tres pelotas blancas y tres pelotas negras ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar cinco de ellas en una fila? Nota: dos selecciones se consideran idénticas si tienen el mismo número de pelotas rojas; el mismo número de pelotas azules; el mismo número de pelotas blancas y el mismo número de pelotas negras.
8. Las cinco reordenaciones del número de cuatro dígitos $ABAB$ son $AABB$, $ABBA$, $BAAB$, $BABA$, $BBAA$. El número $ABAB$ cumple que una de sus reordenaciones es múltiplo de 25 y también una de sus reordenaciones (no necesariamente distinta a la primera) es múltiplo de 4. ¿Cuántos posibles valores tiene $ABAB$?

9. El siguiente es un tablero de 7×7 en el que el cuadradito del centro no se ha pintado, mientras que todos los cuadrillos que lo cubren sí se pintan, después el marco que los cubre no se pinta y finalmente el marco exterior del cuadrado de 7×7 sí se pinta. En total se han pintado 31 cuadrillos. Sea n un número impar. Se pintará el cuadrado de $n \times n$ siguiendo este proceso: no pintar el cuadradito del medio e ir alternando entre pintar un marco sí y el siguiente no. Determina el primer valor de n para el cual bajo este proceso se pinten más de 1000 cuadrillos.



10. Un número de tres dígitos es *disciplinado* si el dígito de unidades es múltiplo de tres; el de las decenas deja residuo 1 en su división con tres y el de las centenas deja residuo 2 en su división con tres. Por ejemplo 819 es disciplinado pero 265 no. Una tripleta de números disciplinados es *intachable* si cada dígito del 1 al 9 aparece exactamente una vez en algún número de la tripleta. ¿Cuántas tripletas de números intachables hay?
11. La operación $\#$ para dos números reales m, n se define como $m\#n = mn + m + n$. Encuentra el valor de

$$\frac{1}{2} \# \frac{1}{3} \# \cdots \# \frac{1}{101}.$$

12. En el cuadrilátero $ABCD$, tenemos $\angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$. El punto E está sobre AB de manera que $BE \times (BC - AD) = AE \times BC$. Si $BC - AD = 18$ cm y $\angle ADB = 2\angle BCE$, encuentra la longitud de BD en centímetros.

